

EXERCICE N°1

On considère la suite U définie sur \mathbb{IN} par:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{IN} \end{cases}$$

- 1- Montrer que pour tout entier naturel n on a: $0 < u_n \leq 1$
- 2- Montrer que pour tout entier naturel n on a: $u_{n+1} - u_n \leq 0$
- 3- On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$
 - a) Calculer v_0 et v_1
 - b) Montrer que v est une suite arithmétique dont-on précisera sa raison
 - c) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n
 - d) Donner la valeur de $S = \sum_{k=0}^{10} v_k$

EXERCICE N°2

I- Soit U une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q tel que

$$\begin{cases} q < -1 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 = 8 \\ u_1 u_2 u_3 = -216 \end{cases}$$

- 1- Calculer u_1 et q
- 2- Montrer que $u_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$
- 3- Déterminer n pour que $\sum_{k=1}^n u_k = 122$

II- Soit V la suite définie sur \mathbb{IN}^* par :
$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n, n \in \mathbb{IN}^* \end{cases}$$

- 1- Calculer v_2 et v_3
- 2- On pose pour tout non nul $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{2}{9}$
 - a- Montrer que W est une suite géométrique déterminer sa raison
 - b- Exprimer w_n en fonction de n

EXERCICE N°3

On considère la suite U définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + n(-1)^{n-1}, n \in \mathbb{IN}^* \end{cases}$$

- 1- Calculer u_1, u_2 et u_3
- 2- Montrer que $u_{n+2} = u_n - (-1)^n$
- 3- Considérons les suites suivantes $v_p = u_{2p-1}$ et $w_p = u_{2p}$, pour tout p non nul
 - a- Calculer v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 et w_3
 - b- Montrer que $w_{p+1} - w_p = -1$



- c- Montrer que $V_p + W_p$ est une suite constante, en déduire que V est une suite arithmétique

EXERCICE N°4

Soit la suite u_n définie par $u_0 \in [0, 2]$ et $u_{n+1} = \frac{2+8u_n}{7+u_n}$

- 1- Montrer que si $u_0 = 2$ alors la suite u est constante
- 2- On suppose que $u_0 \in [0, 2[$
 - a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0, 2[$
 - b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} > u_n$
- 3- Soit v la suite définie par : $v_n = \frac{-2+u_n}{1+u_n}$
 - a- Montrer que v est une suite géométrique
 - b- Exprimer v_n en fonction de n et u_0 , en déduire l'expression de u_n en fonction de n et u_0
 - c- Donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°5

Soit la suite U définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 3U_n - (n^2 + n)$ pour tout n dans \mathbb{N}

- 1- Calculer U_1 et U_2 . En déduire que U est ni arithmétique ni géométrique
- 2- Soit la suite V définie par : $V_n = U_n - \frac{1}{2}n^2 - n - \frac{3}{4}$
 - a- Montrer que la suite V est géométrique et préciser sa raison puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
 - b- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
- 3-
 - a- Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^n v_k$ en fonction de n
 - b- Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel on a :
$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
 - c- En déduire la somme $S' = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n

EXERCICE 6

Soit la suite w définie sur \mathbb{N} par : $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n + 1$

- 1- Calculer w_0, w_1, w_2 puis vérifier que w n'est ni arithmétique ni géométrique
- 2- Soit U la suite arithmétique tel que $U_3 + U_4 = 16$ et $U_{11} = 23$
 - a) Déterminer la raison r et le premier terme de la suite U
 - b) Exprimer U_n en fonction de n
 - c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^n U_k = (n+1)^2$
- 3- Soit T la suite définie sur \mathbb{N} par $T_0 = 1$ et $T_{n+1} = \frac{1}{2}T_n + 1$
 - a) Calculer T_1, T_2 et T_3
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $T_n \geq 2$ en déduire que $T_{n+1} - T_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - c) Soit la suite V définie sur \mathbb{N} par $V_n = T_n - 2$
 - Montrer que V est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0



- Soit $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ calculer S_n en fonction de n ; Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$

4- Vérifier que $W_n = U_n + V_n$ puis calculer $\sum_{k=0}^{10} W_k$

Exercice N°7

On définit la suite U définie sur \mathbb{N}^* par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n ; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1- Calculer u_2 et u_3 . Vérifier que u n'est ni arithmétique ni géométrique

2- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la suite v par : $v_n = \frac{u_n}{n}$

a) Montrer que v est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ dont-on précisera son premier terme

b) Ecrire v_n à l'aide n puis montrer que $u_n = \frac{2n}{2^n}$

c) donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Exprimer à l'aide de n la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

